PROBABILITAT

Josep Pla i Carrera

Primera aproximació a la probabilitat

Considerem un fenomen que té un nombre finit de resultats possibles $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. És l'*espai mostral*.

Suposem que cada resultat possible a_i té associat un nombre real p_i tal que

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$$

El conjunt de valors p_i és una *valoració probabilística* de l'espai mostral.

Un *succés* A està format per un cert nombre r de resultats possibles de l'espai mostral S:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}.$$

Direm que la *probabilitat* $P(A)$ *del succés* A és el valor

$$P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_r}.$$

Un fenòmen és *equiprobable* quan $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$. Aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}.$$

Problemes

PR1.–Proveu que (a) $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

(b′) En general, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$, si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(d′) Generalitzeu (d) a tres, quatre, etc. m successos.

(e) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, on $\overline{A}$ indica l'esdeveniment contrari de A.

(f) Si $A \subseteq B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

PR2.–Aquest problema suggereix la definició general de probabilitat P en un espai mostral S. És una aplicació dels subconjunts de S en $\mathbb{R}$ que compleixi les tres propietats:

(a) Per a cada $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

Podeu veure que aleshores es compleixen les propietats (b′), (d), (d′), (e) i (f) del problema anterior.

Aquesta definició permet de generalitzar el cas *discret* al cas general en el qual S pot ser un conjunt infinit numerable o no numerable. L'únic que cal tenir en compte és que la probabilitat P ha d'estar definida en una família $\mathcal{A}$ de subconjunts d'S tancada per unió i per pas al complementari. Cal, a més, que $S \in \mathcal{A}$.

Un exemple concret ens el proporcionen els subconjunts d'un conjunt geomètric S que sigui una superfície o un sòlid. Aleshores, si $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{\text{àrea d'}(A)}{\text{àrea d'}(S)} \qquad \text{o} \qquad P(A) = \frac{\text{volum d'}(A)}{\text{volum d'}(S)}.$$

Probabilitat condicionada i independència

Considerem el següent exemple: d'un lot de 100 productes amb 80 sense defectes i 20 amb defectes n'agafem dos i ho fem (a) amb substitució, (b) sense substitució.

Considerem ara els següents successos

$$A = \{\text{el primer article és defctuós}\}$$
$$B = \{\text{el segon article és defectuós}\}$$

En el primer cas $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. En el segon cas, $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Però quin és ara el valor de $P(B)$? És clar que ara, en el cas (b), el valor que pren $P(B)$ depén del que hagi passat amb el succés A, ja que el comportament de la mostra varia segons que s'hagi esdevingut A o no. Aleshores indicarem $P(B|A)$ la probabilitat del succés B en el ben entès que el succés A ha succeït prèviament.

En l'exemple que estem comentant és clar que $P(B|A) = \frac{19}{99}$. (En realitat l'espai mostral ha canviat i els successos estan condicionats a A.)

Formalment definim la *probabilitat condicional* per l'expressió

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple. Llancem dos daus i anotem els resultats $\langle x_1, x_2\rangle$, on x_i designa el resultat de l'i-èsim dau ($i = 1, 2$). Considerem els successos

$$A = \{\langle x_1, x_2\rangle : x_1 + x_2 = 10\} \qquad \text{i} \qquad B = \{\langle x_1, x_2\rangle : x_1 < x_2\}.$$

Ara podem considerar el succés

$$A \cap B = \{\langle x_1, x_2\rangle : x_1 + x_2 = 10, x_1 < x_2\} = \{\langle 4, 6\rangle\}.$$

D'on

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

De forma anàloga podíem haver calculat primer la probabilitat de $P(B|A)$ i d'ella haver-ne deduït la probabilitat de $P(A \cap B)$.

En definitiva, doncs,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$
$$P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Llei de les probabilitats totals

Sigui A un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, és a dir, una família finita de successos tal que

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \qquad \text{i} \qquad S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1} \cup B_k.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_{k-1}) + P(A \cap B_k) = \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k) \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Si, com abans, A és un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, aleshores

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot PB_i}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)}, i = 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

Aquesta fórmula rep el nom de fórmula per a calcular la probabilitat de les *causes*, ja que com que s'ha de donar una i només una de les causes B_i, ens permet de conèixer la probabilitat d'aquesta causa en el supòsit que s'hagi donat el succés A.

Successos independents

Dos successos A i B són *independents* si, i només si, cap d'ells no condiciona la probabilitat de l'altre; és a dir, si, i només si,

$$P(A|B) = P(A).$$

Dit d'una forma alternativa, si, i només si,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

En general, n successos $A_1, \dots, A_n$ són *mútuament independents* si, i només si, per a tot $k = 2, \dots, n$, tenim que

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Variables aleatòries

Quan fem un experiment, moltes vegades estem més interessats en algun valor (que serà un nombre real) associat al resultat de l'experiment, que en el resultat mateix. Per exemple, si juguem a cara i creu amb un altre jugador, de manera que si tirem i sur cara rebem 5 pta i si surt creu li donem al contrari 3 pta, els dos nombres 5 i 3 ens interessen molt més a cada jugada que el fet mateix de sortir cara o creu. Això ens porta a la definició de les funcions que prenen valors sobre el conjunt d'esdeveniments elementals d'un experiment. Per dir-ho d'alguna manera, parlem de les *apostes* del joc.

Suposem que tenim un espai mostral $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i unes probabilitats associades p_i tal com s'ha explicat abans. Una *variable aleatòria* és una funció de l'espai mostral S en $\mathbb{R}$ que associa a cada esdeveniment elemental un nombre real.

$$X : S \to \mathbb{R}.$$

Per exemple, sigui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i definim X així

$$X(1) = X(2) = X(3) = 1, \quad X(4) = X(5) = X(6) = -1.$$

Podem interpretar la variable X com el *guany* d'un jugador que rep 1 pta si surt 1, 2 o 3 al dau o en lliura 1 al contrari si surt 4, 5 o 6 al dau.

Un altre exemple. Tirem una moneda dues vegades i l'espai mostral és

$$S = \{CC, C+, +C, ++\}$$

on C indica cara i $+$ indica creu. Una variable aleatòria sobre aquest espai mostral podria ser el *nombre de cares* obtingudes. Tindríem $X(CC) = 2$, $X(C+) = 1$, $X(+C) = 1$, $X(++) = 0$. Sobre el mateix espai mostral podríem definir altres variables aleatòries, com per exemple, el *nombre de cares menys el nombre de creus* i tindríem $Y(CC) = 2$, $Y(C+) = 0$, $Y(+C) = 0$, $Y(++) = -2$.

Esperança matemàtica

Si tenim una variable aleatòria que pren valors reals $x_2, x_2, \ldots, x_n$ sobre l'espai mostral $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i unes probabilitats associades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, es defineix com a *esperança matemàtica* o també *mitjana* al valor

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Per exemple, si ens demanen l'esperança matemàtica de la variable aleatòria *valor obtingut en tirar un dau no trucat*, hem d'entendre: (a) que l'espai mostral és el de possibles jugades del dau, és a dir $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; (b) que totes les ocurrències tenen la mateixa probabilitat (el dau és no trucat), i per tant $p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$; (c) la variable aleatòria X pren els valors reals 1, 2, 3, 4, 5, 6 segon els punts que surten al dau. L'esperança és

$$1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\,\frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Observeu a l'exemple que l'esperança matemàtica o mitjana o *valor esperat* de la variable aleatòria X pot ser un valor real que X pot no prendre mai. La *llei dels grans nombres* ens diu que l'esperança matemàtica d'una variable aleatòria és el valor al qual s'aproxima la mitjana dels valors observats si repetim l'experiment moltes vegades i amb independència.

Problemes

PR3.–Suposem que un cistell conté 550 pomes de les quals 28 són podrides i 47 són verdes. Si n'agafo una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui verda? I que sigui podrida?
Si suposem que les verdes no són podrides, quina és la probabilitat que sigui verda o podrida?
Si n'hi ha quinze de verdes i podrides, quina és la probabilitat que sigui verda i podrida?

PR4.–Tirem sis daus iguals. De quantes maneres podem aconseguir que les seves cares ens mostrin totes nombres diferents?
Ara tirem 6 daus de colors diferents. De quantes maneres podem aconseguir que els seus resultats siguin tots diferents?
En cada un dels casos, quina és la probabilitat que, en llançar-los una vegada, els sis daus ens mostrin un nombre diferent?

PR5.–*El problema de Fermat-Pascal.* Dos jugadors A i B juguen partides cada una de les quals té una probabilitat de $\frac{1}{2}$ de ser guanyada i de $\frac{1}{2}$ de ser perduda. Suposem que el resultat d'una partida no depèn pas dels resultats de les partides anteriors. (Pensem, per exemple, en una sèrie de "cares i creus".) Cada jugador guanya un punt quan guanya i no-res quan perd. Convenen a jugar-se 100 pta cada un i que el pot de 200 pta se l'endurà el primer que guanyi 4 partides. Per la raó que sigui han de plegar quan A necessita dues partides per tal d'haver-ne guanyat 4 i B en necessita 3. Com cal repartir el pot?
Feu el càlcul
(a) suposant que els successos són les situacions reals a partir d'aquell moment, si el joc hagués continuat (*solució de Pascal*);
(b) veient que en quatre partides s'acaba el joc i considerant totes les sèries teòriques (equiprobables) de 4 partides. (*solució de Fermat*).

PR6.–Tirem una moneda, després tirem un dau, i finalment traiem una carta d'un joc de 52 cartes i considerem els successos

$$A = \text{surt cara}$$
$$B = \text{surt un 5 o un 6}$$
$$C = \text{surt una carta de piques}$$

Quin és l'espai mostral S associat a aquesta experiència? Quines són, en relació amb aquest espai mostral, els successos $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$? Quines són les probabilitats que els corresponen? Són independents de dos en dos? I tots tres?

PR7.–Llancem una moneda n vegades i indiquem si surt cara o creu escrivint un 1 o un 0. Com és l'espai mostral S? Quina és la probabilitat de cada un dels resultats possibles si la moneda és correcta? Quina és la probabilitat que surtin k uns? I la probabilitat que surtin $n-k$ zeros?

Suposem ara que la moneda està trucada i que la probabilitat que surti cara és p i la probabilitat que surti creu és $q = 1 - p$. Quina és la probabilitat d'un resultat concret que tingui k cares? Quants casos possibles hi ha amb k cares? Quina és la probabilitat que, en tirar la moneda n vegades, surtin k cares exactament? (*Fórmula de Bernoulli.*)

I k cares almenys?

Calcula de dues maneres diferents la probabilitat que surti almenys una cara.

PR8.–Sigui $S = \{1, 2, \ldots, 120\}$ i suposem el cas equirepartit. Considerem els successos

$$A = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 3\}$$
$$B = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 4\}$$

Calculeu

(a) $P(A)$ i $P(B)$;

(b) $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

Són independents els successos A i B?

Considereu ara el succés

$$C = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 6\}.$$

Quina és la probabilitat de C? I de $B \cap C$? I de $B \cup C$? Els successos B i C, són independents?

Quina és la probabilitat del conjunt dels nombres divisibles per 3, no divisibles per 5 i divisibles per 4 o per 6? (En aquesta part suposem que en el conjunt infinit $\mathbb{N}$ de tots el nombres naturals la probabilitat de múltiple de tres és $\frac{1}{3}$, etc.)

PR9.–Calculeu la probabilitat que en agafar un nombre natural a l'atzar no sigui divisible ni per 3, ni per 4, ni per 6, però en canvi ho sigui per 2 o per 5.

PR10.–Calculeu la probabilitat que en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre ells.

PR11.–Demostreu que és impossible de trucar una parella de daus de manera que la suma de les puntuacions (tirant-los a la vegada) tinguin la mateixa probabilitat.

PR12.–Quants enters hi ha entre 1 000 000 i 10 000 000 que no tinguin dues xifres iguals? I que no tinguin dues xifres iguals i consecutives ?

PR13.–Proveu que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$. (*Indicació*: useu la llei de Morgan.)

PR14.–Hi ha 184 socis del Barça dels quals 123 són sudafricans i 78 són negres. Trieu a l'atzar un d'aquests 184 socis. Quina és la probabilitat que sigui negre?

PR15.–Si $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, aleshores doneu $P(A \triangle B)$ en funció de $P(A), P(B)$ i $P(A \cap B)$ i en funció de $P(A), P(B)$ i $P(A \cup B)$.

PR16.–Si $A_{m_1} = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } m_1\}$ i $A_{m_2} = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } m_2\}$, aleshores

$$P(A_{m_1} \cap A_{m_2}) \geq P(A_{m_1}) \cdot P(A_{m_2}).$$

En quins casos es dóna la igualtat?

PR17.–Quina és la probabilitat que un succés A sigui independent d'ell mateix? Si A i B són dos successos independents i disjunts, quina és la probabilitat d'A? I la de B?

PR18.–Tirem cinc monedes independents. Quina és la probabilitat de 11010? Quina és la probabilitat que surtin tres cares exactament? Quina és la probabilitat que no surtin tres cares? *Nota.* La qüestió és força més complicada si els llançaments no són independents. Intenteu de donar-hi una resposta.

PR19.–*Argument de d'Alembert.* Llancem dues monedes. Són possibles tres successos: dues cares, dues creus, una cara i una creu. Cada succés té doncs probabilitat igual a $\frac{1}{3}$. És correcta la interpretació de d'Alembert? Per què?

PR20.–Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

PR21.–En un cistell de 550 pomes n'hi ha un 2% de podrides. Quina és la probabilitat que, en agafar-ne 25, 2 estiguin podrides?

PR22.–Barragem les cartes d'una baralla de 52 cartes. Quina és la probabilitat que els 4 asos quedin junts?

PR23.–Volem repartir en parts iguals 15 alumnes nous entre els 3 grups que hi ha a l'escola. Entre aquests 15 alumnes n'hi ha tres de gironins. Quina probabilitat hi ha que cada classe en tingui un? Quina probabilitat hi ha que tots tres vagin a parar a un mateix grup?

PR24.–Llancem sis daus. Quina és la probabilitat d'obtenir tres parelles?

PR25.–*El problema de l'aniversari*. Quina és la probabilitat que en un grup d'n persones n'hi hagi dues almenys que hagin nascut el mateix dia?

PR26.–Tenim 4 cartes conegudes i les posem de cap per avall damunt la taula. A l'atzar els donem un valor; quina és la probabilitat d'endevinear-ne 1, 2, 3 o 4?

PR27.–*La paradoxa de Bertrand*. Tracem una corda a l'atzar en un cercle. Quina és la probabilitat que sigui més gran que no pas el costat del triangle equilàter inscrit? Distingiu tres mètodes de càlcul:

(a) la distància al centre;

(b) la situació del punt mitjà de la corda;

(c) l'angle central que determina la corda. Quina és la paradoxa?

PR28.–Col·loquem 8 torres en un tauler d'escacs. Quina és la probabilitat que cap d'elles pugui matar-ne una altre?

PR29.–Un test conté 12 preguntes que solament accepten la resposta de "veritat" o "fals". Si un estudiant decideix col·locar-ne sis de cada a l'atzar, de quantes maneres pot fer-ho? Suposant que efectivament sis de les preguntes siguin certes i sis falses, quina és la probabilitat que ho endivini?

PR30.–En una porta hi ha dos panys i les claus són en una capsa en la qual hi ha sis claus. Si en traiem dues a l'atzar i en col·loquem una a cada pany, quina és la probabilitat que obrin la porta? Quina és la probabilitat que el parell de claus serveixi per obrir la porta?

PR31.–S'han perdut dos cargols d'una màquina que té cargols de tres mides diferents. Agafem tres cargols de mides diferents. Quina és la probabilitat que ens serveixin per arreglar la màquina?

PR32.–Llancem un dau tres vegades. Quina és la probabilitat que les tres vegades surti el número més alt? Quina és la probabilitat que cada vegada surti un valor més alt que l'anterior?

PR33.–Llancem tres daus dues vegades. Quina és la probabilitat que les dues vegades s'obtingui el mateix número

(a) si els daus són distingibles?

(b) si els daus són indistingibles?

PR34.–En una festa hi ha 6 dones i 4 homes. De quantes maneres podem formar quatre parelles de ball? I tres parelles de ball?

PR35.–Si agafem 4 sabates a l'atzar de cinc parells diferents, quina és la probabilitat que almenys poguem fer una parell de sabates?

PR36.–Sabeu que de les quatre cartes cap per avall que hi ha damunt la taula, dues són vermelles i dues negres. Els assignem un color a l'atzar. Quina és la probabilitat d'encertar-ne 4, 2 o cap?

PR37.–Un autobús fa 4 parades dins l'aeroport per tal de distribuir 15 passatgers. Quina és la probabilitat que tots baixin a la mateixa parada? Quina és la probabilitat que almenys una persona baixi a cada una de les parades?

PR38.–En un bombo hi ha 366 boles etiquetades amb els dies d'un any de traspàs. Si n'extreiem 180, quina és la probabilitat que corresponguin a dies distribuïts uniformement sobre els 12 mesos? Quina és la probabilitat que entre les 30 primeres boles extretes no ni hagi cap dia del mes d'Agost o de Setembre?

PR39.–*El problema dels llumins de Banach.* Tenim dues capses de llumins i en posem una a cada butxaca dels pantalons. Cada capsa té n llumins. Quan en necessitem un, triem a l'atzar una butxaca, treiem la capsa de llumins, n'agafem un i tornem la capsa a la butxaca. Una de les vagades que traiem una capsa, observem que és buida. Quina és la probabilitat que a l'altre capsa hi quedin k llumins?

PR40.–Un dau perfecte es llança dues vegades. El total de punts obtinguts és 7. Quina és la probabilitat que el primer punt hagi esta k, amb $0 \leq k \leq 6$?

PR41.–Tirem sis daus. Quina és la probabilitat que surtin sis resultats diferents?

PR42.–Considerem famílies amb dos fills (que poden ser nois o noies amb igual probabilitat). Considerem els successos

$$
\begin{aligned}
A &= \text{el primer fill és un noi} \\
B &= \text{els dos fills tenen el sexe diferent} \\
C &= \text{el primer fill és una noia} \\
D &= \text{el segon fill és un noi}
\end{aligned}
$$

Proveu que A i B són independents i B i C també, però A i C no. La independència no és transitiva. Són independents A i D ? I B i D? I A, B i D?

PR43.–*La ruïna del jugador.* Dos jugadors M i N disposen de m i n pta respectivament. Juguen amb una moneda no trucada. Si surt cara, M dóna una pesseta a N i si surt creu ho fan al revés. El joc continua fins que un dels dos jugadors s'arruïna. Calculeu les probabiltats de guany de cada jugador i la durada mitjana de la partida.

Mostra de solucions

Solució del problema PR5

(a) Suposem que seguim jugant realment. Tenim els següents casos i probabilitats

Favorables a A:		*Favorables a B:*	
AA	1/4	$ABBB$	1/16
ABA	1/8	$BABB$	1/16
$ABBA$	1/16	$BBAB$	1/16
BAA	1/8	BBB	1/8
$BABA$	1/16		
$BBAA$	1/16		

El problema no és equirepartit.

(b) Si el problema és equirepartit i considerem tots els casos possibles, és a dir, totes les quaternes possibles –si el joc seguís, en quatre partides segur que hi ha un guanyador– podem comptar fàcilment els casos favorables a A i els casos favorables a B que són, respectivament, 11 i 5. S'obté el mateix resultat que a (a).

Solució del problema PR9

Posem $I_n = n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$. Aleshores es demana la probabilitat del succés

$$A = (I_2 \cup I_5) \cap \overline{I_3} \cap \overline{I_4} \cap \overline{I_6},$$

on $\overline{I_n} = \mathbb{Z} - I_n$. Cal recordar que $I_n \cap I_m = \{z \in \mathbb{Z} : z = \dot{n} \text{ i } z = \dot{m}\} = I_r$, on $r = \text{mcm}(m, n)$. Cal recordar també que si M i N són succesos, llavors

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

i, com que $M \cap \overline{N} = M - (M \cap N)$,

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M) - P(M \cap N).$$

Ara cal aplicar aquestes fórmules a l'esdeveniment A.

Solució del problema PR20

Si els daus són distingibles, aleshores tenim 6^6 resultats diferents.

Si són indistingibles hi ha $CR_6^6 = 462$ casos, que es poden desglosar:

- tots iguals: $C_6^1 = 6$
- 5 d'iguals: $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30$
- 4 d'iguals i $\begin{cases} \text{2 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^2 = 60 \\ \text{2 d'iguals:} \quad C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \end{cases}$
- 3 d'iguals i $\begin{cases} \text{3 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^3 = 60 \\ \text{2 d'iguals i un de diferent:} \quad C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \\ \text{3 d'iguals:} \quad C_6^2 = 15 \end{cases}$
- 2 d'iguals i $\begin{cases} \text{4 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^4 = 30 \\ \text{2 d'iguals i 2 de diferents:} \quad C_6^2 \cdot C_4^2 = 90 \\ \text{2 d'iguals i 2 diguals:} \quad C_6^3 = 20 \end{cases}$
- tots diferents: $C_6^6 = 1$

Solució del problema PR26

Tenim 4! maneres diferents d'assignar valors. Volem calcular la probabilitat d'encertar exactament una carta que pot se la primera, o la segona, o la tercera o la quarta. Si les cartes *reals* són a, b, c i d i suposem que hem d'encertar la quarta, els valors que podem assignar a les tres primeres són

$$abc, acb, bac, cba, bca, cab.$$

D'aquests casos, els únics que són favorables a encertar només la quarta són els dos darrers. Els mateix valor ens sortiria si calculéssim els casos favorables a encertar exactament la primera, la segona o la tercera. Els casos favorables en total són 8 i la probabilitat serà $8/24 = 1/3$.

Si hem d'encertar exactament dues cartes, el parell de cartes encertades es pot triar de $C_4^2 = 6$ maneres diferents, i si per exemple hem d'encertar la tercera i la quarta, els valors que podem assignar a la primera i la segona són

$$ab, ba$$

i només aquest últim fa que no s'encerti ni a primera ni la segona. Els casos favorables són 6 i la probabilitat és $6/24 = 1/4$.
Encertar exactament tres cartes és impossible.
Calculeu la probabilitat d'encertar totes les cartes, i la de no encertar-ne cap.